IV разред

Друштво физичара Србије и Министарство просвете науке и технолошког развоја Републике Србије

ЗАДАЦИ-АЛФА КАТЕГОРИЈА*

**Крагујевац
23-24. април 2021.**

1. Временски независна једнодимензионална Шредингерова једначина у координатној репрезентацији за честицу масе m и енергије E у потенцијалу $U(x)$ има облик $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+U(x)\psi(x)=E\psi(x)$ **(1)**.

Честица масе m и енергије $E<0$ ($E=-|E|$) налази се у потенцијалу $U'(x)=-\alpha\delta(x), \alpha\in R, \alpha>0$ (слика 1), при чему је $\delta(x)=\begin{cases}+\infty, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$ Диракова делта функција. Решења Шредингерове једначине су облика

$$\psi(x)=\begin{cases}\psi_{\mathrm{I}}(x)=C_1e^{kx}+C_2e^{-kx}, & x<0\\ \psi_{\mathrm{II}}(x)=C_3e^{kx}+C_4e^{-kx}, & x>0\end{cases},\ k\in R, k>0.$$

а) За сваку од две области једначину **(1)** свести на облик $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}-k^2\psi(x)=0$, $k\in R$, $k>0$, а затим одредити израз за величину k. **[1 поен]**

б) Из услова да таласна функција честице буде коначна одредити вредност константи C_3 и C_2, а затим написати како изгледа облик таласне функције честице. **[3 поена]**

Таласна функција је непрекидна у тачки $x=0$, док први извод трпи скок тако да важи $\left.\frac{d\psi_{\mathrm{II}}(x)}{dx}\right|_{x=0}-\left.\frac{d\psi_{\mathrm{I}}(x)}{dx}\right|_{x=0}=-\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi_{\mathrm{I}}(x=0)$.

$\left.\frac{d\psi(x)}{dx}\right|_{x=0}$ означава да се нађе први извод таласне функције и да се затим у добијени израз уврсти $x=0$.

в) Одредити израз за енергију честице. **[5 поена]**

г) Одредити израз за таласну функцију честице. **[11 поена]**

Величине m,α и $\hbar$ сматрати јединим познатим величинама у задатку (подразумева се да су величине e и x познате).

2. Систем приказан на слици 2 налази се у равнотежи, у непокретној посуди. У равнотежи испод клипа масе m налази се n молова једноатомског идеалног гаса температуре T_0, а изнад клипа вакуум, док је идеална и безмасена опруга крутости $k=\frac{mgS}{V_0}$ недеформисана (S је површина попречног пресека клипа, а V_0 запремина идеалног гаса у равнотежном стању). Клип може да се креће дуж зидова посуде без трења у вертикалној равни у гравитационом пољу (убрзање силе Земљине теже је g). Клип и посуда су топлотно непроводни, а такође не могу да пропуштају честице гаса. Одредити период малих осцилација клипа око равнотежног положаја. Коначни израз за период изразити искључиво преко величина m,g,n,T_0 и R (универзална гасна константа), које уједно сматрати и јединим познатим величинама у задатку. Користити апроксимацију $(1-a)^{-n}\approx 1+na,\ a>0, a<<1, n>0$. **[20 поена]**

3. **а)** Двоструко јонизовани, непокретни и побуђени атом литијума ${}^{7}_{3}Li^{2+}$ емитује фотон који одговара четвртој емисионој спектралној линији Лајманове серије. Одредити вредност енергије емитованог фотона и изразити је у јединицама eV. **[7 поена]**

б) Рачунским путем одредити интервал таласних дужина емисионог спектра Пашенове серије троструко јонизованог и непокретног атома берилијума ${}^{9}_{4}Be^{3+}$. **[8 поена]**

Користити следеће бројне вредности: Ридбергова константа $R=1{,}097\cdot 10^{7}\ \mathrm{m^{-1}}$, величина $R\cdot h\cdot c=13{,}6\,\mathrm{eV}$ (где је R-Ридбергова константа, h-Планкова константа, c - брзина светлости у вакууму).

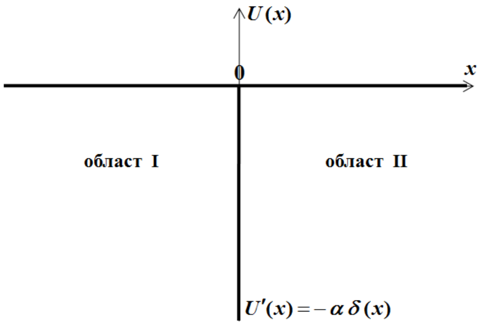
4. Посматрајмо инверзно Комптоново расејање релативистичког електрона укупне енергије E (кинетичка енергија електрона је већа од енергије мировања електрона E_0) и фотона ниске енергије $h\nu$ (његова енергија је мања од енергије мировања електрона E_0). Процес расејања је схематски приказан на слици 3.

а) Изразити енергију расејаног фотона $h\nu'$ преко величина E, E_0, h, ν и угла θ. **[11 поена]**

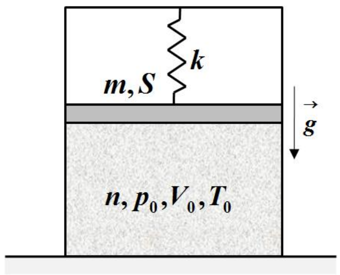
б) Одредити вредност угла θ тако да је енергија расејаног фотона $h\nu'$ максимална и у том случају изразити енергију расејаног фотона $h\nu'$ преко величина E, E_0, h, ν . **[3 поена]**

в) За вредности $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2} = 7$ упадног електрона, и таласну дужину $\lambda = 500$ nm упадног фотона, одредити максималну енергија расејаног фотона (у јединицама eV) и његову таласну дужину. **[6 поена]**

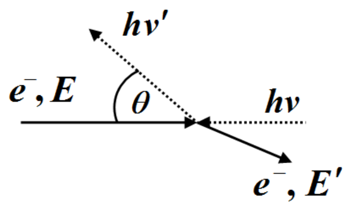
Користити следеће бројне вредности: енергија мировања електрона $E_0 = 0{,}511$ MeV , Планкова константа $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J·s , брзина светлости у вакууму $c = 2{,}998 \cdot 10^{8}$ m/s , $1\,\text{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J .



слика 1



слика 2



слика 3

Напомена. Задатак из обраде резултата мерења добићете на два посебна листа папира!

*У алфа категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима специјализованих гимназија за област математика и физика.

Решења свих задатака треба јасно образложити са јасно дефинисаним физичким законима и величинама које користите приликом решавања задатака. Нарочито дефинисати ознаке које уводите а које нису уобичајене.

Обавезно на сваком листу папира (и на милиметарском папиру) који предајете напишите своју шифру, и обавезно нумеришите сваку страну!

Задатке припремили: Владимир Чубровић 1,2,3,4; доц. др Владимир Марковић 5, ПМФ, Крагујевац
Рецензенти: проф. др Милан Ковачевић доц. др Јасна Стевановић и Жељко Цимбаљевић, ПМФ Крагујевац; Владимир Чубровић 5;

Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: доц. др Владимир Марковић,ПМФ, Крагујевац

Свим такмичарима желимо успешан рад!

РЕШЕЊА-АЛФА КАТЕГОРИЈА*

1. **а)** За обе области Шредингерова једначина је облика $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}-\frac{2m|E|}{\hbar^2}\psi(x)=0$ тако да је $k=\sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}$ **[1п].**

б) Константа C_2 мора да буде једнака нули $C_2=0$ **[1п]** иначе би у супротном таласна функција дивергирала у $-\infty$, а самим тим и густина вероватноће налажења честице у $-\infty$. Слично, константа C_3 мора да буде једнака нули $C_3=0$ **[1п]** иначе би у супротном таласна функција дивергирала у $+\infty$. На основу претходног таласна функција честице је облика $\psi(x)=\begin{cases}\psi_{\mathrm{I}}(x)=C_1e^{kx}, x<0\\ \psi_{\mathrm{II}}(x)=C_4e^{-kx}, x>0\end{cases}$ **[1п]**.

в) Из услова непрекидности таласне функције следи $C_1=C_4$ **[1п]**.

Из услова $\left.\frac{d\psi_{\mathrm{II}}}{dx}\right|_{x=0}-\left.\frac{d\psi_{\mathrm{I}}}{dx}\right|_{x=0}=-\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi_{\mathrm{I}}(x=0)$ добијамо $-kC_4-kC_1=-\frac{2m\alpha}{\hbar^2}C_1$ **[2п]**, односно $k=\frac{m\alpha}{\hbar^2}$ тако да је $|E|=\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$, дакле енергија честице је квантована и може имати само вредност $E=-|E|=-\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$ **[2п]**.

г) Константу C_1 добијамо нормирањем таласне функције $\int_{-\infty}^{0}|C_1|^2e^{2kx}dx+\int_{0}^{+\infty}|C_1|^2e^{-2kx}dx=1$ **[3п]**. Даље је $2|C_1|^2\int_{0}^{+\infty}e^{-2kx}dx=1$ **[2п]** чијим решавањем добијамо $\frac{|C_1|^2}{k}=1$ односно $C_1=\sqrt{k}$ **[4п]**. Дакле таласна функција честице се може приказати у облику $\psi(x)=\sqrt{\frac{m\alpha}{\hbar^2}}\cdot e^{-\frac{m\alpha}{\hbar^2}\cdot|x|}$ **[2п]**.

2. Равнотежни положај клипа одређен је условом $mg=p_0S$ **[1п]**. Ако померимо клип из равнотежног положаја вертикално наниже за дужину x, једначина кретања клипа је $m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-pS+mg$ **[3п]**. Притисак гаса p се добија из једначине за адијабатски процес $p_0V_0^{\gamma}=pV^{\gamma}$ **[2п]**, запремина V је једнака $V=V_0-xS$, тако да је $p=\left(1-\frac{xS}{V_0}\right)^{-\gamma}p_0$ **[3п]**. Како је $xS<<V_0$ добијамо приближну формулу $p\approx\left(1+\gamma\frac{xS}{V_0}\right)p_0$ **[3п]**. По услову задатка је $k=\frac{mgS}{V_0}$. На основу претходног полазна једначина кретања добија облик $\frac{d^2x}{dt^2}+\left((1+\gamma)\frac{mg^2}{p_0V_0}\right)x=0$ **[4п]**. Користећи једначину стања идеалног гаса $p_0V_0=nRT_0$ **[1п]**, и да је за једноатомски идеални гас $\gamma=5/3$, добијамо $\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{8mg^2}{3nRT_0}\right)x=0$ **[2п],** па је период малих осцилација $T=2\pi\sqrt{\frac{3nRT_0}{8mg^2}}$ **[1п]**.

3. **а)** Таласна дужина спектралне линије која одговара преласку електрона са главним квантим бројем m у стање електрона са главним квантним бројем n водонику сличних јона одређена је формулом $\frac{1}{\lambda}=RZ^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)(1)$ **[1п]**. Енергија емитованог фотона се може приказати формулом $\frac{hc}{\lambda}=hcRZ^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)$ тј. $E_{fotona,m\to n}=13{,}6\mathrm{eV}\cdot Z^2\cdot\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)$ **[2п]**. У случају четврте спектралне линије Лајманове серије двоструко јонизованог, непокретног, и побуђеног атома литијума ${}_3^7Li^{2+}$ је $Z=3$ **[1п]**, $n=1$ **[1п]** и $m=5$ **[1п]** тако да је $E_{\mathrm{fotona},5\to1}\approx117{,}5\,\mathrm{eV}$ **[1п]**.

б) Интервал таласних дужина емисионог спектра, за прелазе $m \to n$, $m > n$, при чему је за први прелаз $m = n+1$, а за јонизацију $m = \infty$, користећи формулу (1) је $\lambda \in \left[\dfrac{n^2}{RZ^2}, \dfrac{n^2(n+1)^2}{2n+1} \cdot \dfrac{1}{RZ^2}\right]$ **[4п]**. За јон берилијума ${}^{9}_{4}Be^{3+}$ је $Z = 4$ **[1п]**, а Пашенова серија одређена главним квантним бројем $n = 3$ **[1п]** тако да је $\lambda_{\text{Pašenova}} \in [\,51{,}3\,\text{nm}\,, 117{,}2\,\text{nm}\,]$ **[2п]**.

4. **а)** За дати процес закон одржања енергије гласи $h\nu + E = h\nu' + E'$ **[2п]**. Из закона одржања импулса примењен на троугао импулса важи $(p'c)^2 = (h\nu')^2 + (pc - h\nu)^2 + 2h\nu'(pc - h\nu)\cos\theta$ **[5п]**. Такође важе следећи изрази $E^2 = (pc)^2 + E_0^2$ **[1п]** и $E'^2 = (p'c)^2 + E_0^2$ **[1п]**.

Из претходних једначина следи $h\nu' = \dfrac{E + \sqrt{E^2 - E_0^2}}{E + h\nu + (\sqrt{E^2 - E_0^2} - h\nu)\cos\theta} \cdot h\nu$ **[2п]**.

б) Како је по услову задатка $E_\text{k} > E_0$ (кинетичка енергија електрона је већа од енергије мировања електрона E_0) и $h\nu < E_0$ (енергија фотона је мања од енергије мировања електрона E_0), тада је $\sqrt{E^2 - E_0^2} > h\nu$, па следи да је максимална енергија расејаног фотона $h\nu'_{\max}$ у случају када је $\theta = \pi$ **[2п]**, тако да је максимална енергија расејаног фотона $h\nu'_{\max} = \dfrac{E + \sqrt{E^2 - E_0^2}}{E + 2h\nu - \sqrt{E^2 - E_0^2}} \cdot h\nu$ **[1п].**

в) Како је $E = \gamma E_0$ **[1п]** и $h\nu = \dfrac{hc}{\lambda} \approx 2{,}48\,\text{eV}$ **[1п]** последњи израз добија облик $h\nu'_{\max} = \dfrac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma + \dfrac{2h\nu}{E_0} - \sqrt{\gamma^2 - 1}} \cdot h\nu \approx 481\,\text{eV}$ **[1+1п],** тако да је $\lambda' = \dfrac{c}{\nu'_{\max}} \approx 2{,}58\,\text{nm}$ **[1+1п].**